

Aufgabe 1: Differentialgleichung

Lösen sie die folgende Differentialgleichung:

$$x^3 y''(x) - 4x^2 y'(x) - 6xy(x) = 2x^4$$

Hinweise:

- Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung ist gegeben durch die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung plus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.
- Die homogene Differentialgleichung hat die besondere Form, dass höhere Ableitungen von höheren Potenzen in x begleitet werden. In solchen Fällen ist der Ansatz $y(x) = x^\alpha$ geeignet.

Aufgabe 2: Vektoranalysis

a) Divergenz und Gradient

Beweisen Sie die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} (f(\vec{r})g(\vec{r})) &= (\vec{\nabla} f(\vec{r})) g(\vec{r}) + f(\vec{r}) (\vec{\nabla} g(\vec{r})) \\ \vec{\nabla} \cdot (f(\vec{r})\vec{A}(\vec{r})) &= f(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) + \vec{A}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} f(\vec{r}))\end{aligned}$$

Wobei f, g skalare Funktionen sind und $\vec{A}$ ein Vektorfeld ist. Sie können $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ als orthogonale Basisvektoren annehmen. Damit erhält man die Komponentenform eines Ortsvektors und eines Vektorfeldes: $\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i$ und $\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^3 A_i(\vec{r}) \vec{e}_i$.

b) Kettenregel

Zeigen Sie, daß für den Gradienten einer Funktion, die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängt folgende Identität gilt:

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Zeigen Sie weiter, dass für jede Funktion der Form $F(t) = V(\vec{r}(t))$ die folgende Identität gilt:

$$\frac{d}{dt} F(t) = (\vec{\nabla} V(\vec{r})) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

Verifizieren Sie dies explizit für die Fälle

$$\textbf{a)} F(t) = V_1(\vec{r}_1), \quad \textbf{b)} F(t) = V_2(\vec{r}_2),$$

mit $\vec{r}_1 = (t, 2t, t^2)$, $\vec{r}_2 = (t^2, 1, 0)$ sowie $V_1(\vec{r}_1) = \vec{a} \cdot \vec{r}_1$ und $V_2(\vec{r}_2) = \exp(-|\vec{r}_2|)$. Dabei sei $\vec{a}$ ein konstanter Vektor.

Aufgabe 3: Kraftfelder

Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \exp(-|\vec{r}|).$$

- a) Berechnen Sie die Arbeit, die benötigt wird, um einen Massenpunkt auf zwei verschiedenen Wegen vom Punkt $P_1 = (a, 0, 0) \equiv a\vec{e}_x$ zum Punkt $P_2 = (0, -a, \frac{3}{2}\pi) \equiv -a\vec{e}_y + \frac{3}{2}\pi\vec{e}_z$ zu bewegen. Der erste Weg, C_1 , liege auf der Spirale $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, t)$, $t \in [0, \frac{3}{2}\pi]$, der zweite, C_2 , verbinde mittels einfacher Strecken (Geraden) die Punkte P_1 , $P_3 = (a, a, \frac{3}{2}\pi)$, $P_4 = (0, 0, \frac{3}{2}\pi)$, P_2 .

Hinweise:

- Eine hilfreiche Substitution ist $y = \sqrt{t^2 + a^2}$.

- b) Das Ergebnis lässt vermuten, dass diese Kraft konservativ ist. Finden Sie das entsprechende Potential und zeigen Sie, wie man mit Hilfe des Potentials die Arbeit viel einfacher berechnen kann.

Hinweise:

- Kann man $\vec{F}$ als Gradient schreiben?